OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - BRĂILA, 22 februarie 2015
CLASA A XII-A - Soluții

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive și F o primitivă a sa.

Determinați funcția f astfel încât $\left(e^{2x}+1\right)\left(f(x)-F(x)\right)=e^{2x},\forall x\in\mathbb{R}$.

Costel Cerchez, Brăila

Soluție.

Inmultim relatia data cu $\frac{e^{-x}}{e^{2x}+1}$

și obținem $e^{-x}[f(x)-F(x)]=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

Aceasta relatie se rescrie

$\left(e^{-x}\left[F(x)\right]\right)'=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

și cum

$\int\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arctg}e^{x}+C$, deducem că există $c\in\mathbb{R}$

astfel încât $e^{-x}\left[F(x)\right]=\operatorname{arctg}e^{x}+c$

Deci $F(x)=e^{x}\operatorname{arctg}e^{x}+ce^{x}$ si prin derivarea relatiei obtinem $f(x)$.

2. Fie $G=\left(\frac{1}{k},k\right)$, $k>1$ și legea de compoziție:

$$x*y=\frac{\frac{k^2+1}{k}xy-2(x+y)+\frac{k^2+1}{k}}{2xy-\frac{k^2+1}{k}(x+y)+\frac{k^4+1}{k^2}},\ \forall x,y\in G.$$

Să se arate că:

a) $(G,*)$ este grup;

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ și să se determine părțile stabile finite ale lui $(G,*)$;

c) Să se determine un automorfism strict descrescător al lui $(G,*)$.

Gheorghe Alexe, Brăila

Soluție.

$$1)\ ,,*''\ \ se\ poate\ scrie\ :\ x*y=\frac{k+\frac{1}{k}\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}$$

Se verifica axiomele grupului

$-element\ neutru:\ e=\frac{k^2+1}{2k}\ \in G$

$-element\ simetric:\ x'=k+\frac{1}{k}-x\ \in G$

$$(\forall)x\in G$$

$$2)\ \underbrace{x*x*\ldots*x}_{„n''ori}=x^{(n)}=\frac{k+(-1)^n.\frac{1}{k}.\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)^n}{1+(-1)^n.\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right)^n}\qquad n\geq 2\ ,n\in N$$

Se demonstreaza prin inductie completa

$2\ )\ Partile\ stabile\ finite\ ale\ lui\ G\ \ (\exists)m\ ,n\ \in N^*\ ,m\neq n\ \ \ a.i.\ \ x^{(n)}=x^{(m)}$

$Fie\ t=\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\ ,\leq>\ (-t)^m=(-t)^n$

$Fie\ m>n\ \ (-t)^n*[(-t)^{m-n}-1\ ]=0$

$\leq>a)\ \ (-t)^n=0\ \ sau\ \ b)\ \ (-t)^{m-n}=1$

$a)\ \ (-t)^n=0<=>\ -t=0\ \ \ \frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}=0<=>x=k\ \ (fals\ )$

$$x\in\left(\frac{1}{k}\ ,k\ \right)$$

$b)\ \ (-t)^{m-n}=1$

$1)\ m-n=impar=>\ -t=1<=>t=-1$

$\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}=-1\ =>x-k=-x+\frac{1}{k}$

$2x=k+\frac{1}{k}\ \ \ =>\ \ x=\frac{k^2+1}{2k}=e\in\left(\frac{1}{k}\ ,k\ \right)$

$2)m-n=par\ =>\ -t=\pm 1\ \ \ =>$

$t=1\ \ sau\ \ t=-1$

$$\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}=1 \Rightarrow -k=-\frac{1}{k}\ ,k=\frac{1}{k}\ fals$$

$$\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}=-1 \Rightarrow x=\frac{k^2+1}{2k}=e\in G$$

Deci singura parte stabila finita a lui G fata de ,,$*$'' este $E=\{e\}=\left\{\frac{k^2+1}{2k}\right\}$

E este un subgrup finit impropriu a lui G si este singurul.

$(E,*)$ *subgrup* C $(G,*)$ *grup*

3) $f:(G,*)\to(G,*)$

f automorfism strict descrescator cautam un automorfism de forma:

$f(x)=m*x+n$

1) *f bijectiva pe* $\left(\frac{1}{k},k\right)=G$

$(\forall)x,y\in G$

2) $f(x*y)=f(x)*f(y)$

X	$\frac{1}{k}$		$\frac{k^2+1}{2k}$		k
f(x)	k	↘	$\frac{k^2+1}{2k}$	↘	$\frac{1}{k}$

$$\lim_{\substack{x->\frac{1}{k}\\ x>\frac{1}{k}}}(m*x+n)=\frac{m}{k}+n=k=>m+k*n=k^2$$

$$\lim_{\substack{x->k\\ x<k}}(m*x+n)=m*k+n=\frac{1}{k}\ ,m*k^2+n*k=1$$

$$\begin{cases} m+k*n=k^2\\ m*k^n+k*n=1\end{cases}=>\begin{cases} m=-1\\ n=\frac{k^2+1}{k}\end{cases}$$

$$f(x)=-x+\frac{k^2+1}{k}\ ,\qquad f:\left(\frac{1}{k},k\right)\to\left(\frac{1}{k},k\right)$$

$f\searrow pe\ \left(\frac{1}{k},k\right)=>f$ *injectiva pe G*

f *cont si* $f\left[\left(\frac{1}{k},k\right)\right]=\left(\frac{1}{k},k\right)=>f$ *surjectiva pe G*

$=>$ 1) *f bijectiva pe G*

2) $f(x*y)=f(x)*f(y)\ ,\quad (\forall)x,y\in G$

$$f(x*y)=-(x*y)+\frac{k^2+1}{k}=$$

$$= -\left[\frac{k+\frac{1}{k}\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}\right]+k+\frac{1}{k}=$$

$$= \frac{\frac{1}{k}+k\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)} = f(x*y)$$

$$f(x)*f(y) = \frac{k+\frac{1}{k}\left[\frac{f(x)-k}{f(x)-\frac{1}{k}}\right].\left[\frac{f(y)-k}{f(y)-\frac{1}{k}}\right]}{1+\left[\frac{f(x)-k}{f(x)-\frac{1}{k}}\right].\left[\frac{f(y)-k}{f(y)-\frac{1}{k}}\right]} =$$

$$= \frac{\frac{1}{k}+k\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)}{1+\left(\frac{x-k}{x-\frac{1}{k}}\right).\left(\frac{y-k}{y-\frac{1}{k}}\right)} = f(x*y)$$

$$\Rightarrow f(x*y)=f(x)*f(y) \quad (\forall)x,y \in G$$
$$\left.\begin{array}{l} -\ f \text{ bijectiva pe } G \\ -\ f \text{ endomorfism pe } (G,*) \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \text{ automorfism pe grupul } (G,*) \text{ strict descrescator}$$

3. Fie $(G,\bullet)$ un grup finit de ordin impar și H un subgrup propriu, necomutativ, al lui G. Să se arate că există două elemente distincte din $G \setminus H$ care comută.

Gazeta matematică

Soluție.

Fie $x \in G \setminus H \Rightarrow x^{-1} \in G \setminus H$ și $x \neq x^{-1}$ deoarece grupul are ordin impar. Cum x și x^{-1} comută, problema este rezolvată.

4. Să se calculeze $\int \frac{\sin 2x - tg^2 x}{e^{tgx} + \sin^2 x} dx$, $x \in \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{3} \right)$.

Narcis Gabriel Turcu, Brăila

Soluție.

$$f : \left(\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{3} \right) \to \mathbb{R}, \ f(x) = e^{tgx} + \sin^2 x$$

$$f'(x) = \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} + \sin 2x$$

$$f'(x) - \frac{f(x)}{\cos^2 x} = \sin 2x - tg^2 x$$

$$\int \frac{\sin 2x - tg^2 x}{e^{tgx} + \sin^2 x} dx = = \int \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{\cos^2 x}}{f(x)} dx = \int \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \ln\left(e^{tgx} + \sin^2 x \right) - tgx + C.$$